
KAJIAN NUMERIK TENTANG HUBUNGAN ANTARA POROSITAS DENGAN MODULUS YOUNG MENGGUNAKAN WOLFRAM MATHEMATICA

Mustari, Yuant Tiandho*, dan Fitri Afriani

Jurusan Fisika, Universitas Bangka Belitung
Jl. Kampus Peradaban, Merawang, Kep. Bangka Belitung 33172, Indonesia

e-mail: yuant@ubb.ac.id

ABSTRAK

Pada artikel ini dilakukan kajian numerik tentang kaitan antara porositas dengan modulus Young dari beberapa material berpori menggunakan perangkat lunak Wolfram Mathematica. Kajian numerik dilakukan berdasarkan metode regresi dari tiga jenis model persamaan matematis yang kerap digunakan untuk menggambarkan hubungan antara modulus Young dan porositas, seperti: $E = E_0 \exp(-aP)$, $E = E_0 \exp(-bP - cP^2)$, dan $E = E_0(1 - dP)$. Pengujian model dilakukan berdasarkan analisis regresi menggunakan algoritma Levenberg-Marquardt. Berdasarkan residu yang dihasilkan model persamaan matematis, $E = E_0 \exp(-bP + cP^2)$ memiliki tingkat akurasi yang lebih tinggi dibandingkan ketiga model lainnya.

Kata kunci: porositas, modulus Young, Wolfram Mathematica.

PENDAHULUAN

Secara umum, suatu material berpori dapat didefinisikan sebagai suatu jenis material berbentuk padat yang memiliki pori untuk tujuan tertentu. Keberadaan pori dalam suatu material dapat membuat suatu material memiliki karakteristik yang unik dan berbeda. Pori dapat membuat suatu material memiliki luas penampang yang lebih besar (Escoto, et al., 2012), memiliki rapat massa yang lebih kecil (Wu, et al., 2013), dan dapat membuat material tersebut dapat dialiri oleh suatu fluida (Yao, et al., 2013). Karena tingginya potensi aplikasi dari material berpori maka banyak bidang yang mempelajari karakteristik dan metode rekayasa dari material ini. Sebagai contoh, dalam industri kimia material berpori banyak diaplikasikan sebagai katalis dan absorben suatu polutan (Li, et al., 2014; Parlett, et al., 2013), dalam bidang elektronika dapat digunakan sebagai elektroda dan divais sensor (Chen, et al., 2012; Ringgaard, et al., 2015), dan dalam bidang medis dapat diterapkan sebagai material perancah tulang (Afriani, et al., 2015).

Selain morfologi pori, salah satu aspek penting yang perlu dikaji sebagai pertimbangan dalam pengaplikasian material berpori adalah sifat elastisitasnya. Pertimbangan ini sangat penting mengingat elastisitas adalah sifat yang menentukan kemampuan mekanis dari suatu material. Ketika suatu material memiliki sifat elastisitas yang tinggi maka material tersebut akan lebih dapat bertahan ketika diberikan suatu gangguan dari luar. Selain itu, dalam berbagai macam bidang penelitian, seperti pada perancah tulang, keelastisitasan material berpori menjadi sangat penting karena menentukan seberapa kuat material tersebut dapat menopang dirinya dan sistem yang dibebankan padanya (Hollister, 2005).

Hubungan antara porositas dan keelastisitasan dari suatu material berpori telah cukup banyak dipelajari

dalam beberapa dekade terakhir (Jana, et al., 2017). Kebanyakan hubungan antara porositas dan modulus elastistas, seperti pada material keramik dan paduan logam, memiliki hubungan yang berbanding terbalik. Semakin tinggi porositas dari suatu material maka semakin kecil nilai modulus elastisitasnya. Secara matematis, untuk menggambarkan korelasi tersebut beberapa model telah diajukan. Beberapa model hubungan antara porositas dengan modulus elastisitas, khususnya modulus Young, yang telah dikenal secara luas diantaranya adalah (Panakkal, et al., 1990),

$$E(P) = E_0 \exp(-aP) \quad (1)$$

$$E(P) = E_0 \exp(-bP - cP^2) \quad (2)$$

$$E(P) = E_0(1 - dP) \quad (3)$$

dimana P adalah porositas, $E(P)$ adalah modulus Young dalam fungsi porositas, dan E_0 , a , b , c , dan d adalah konstanta yang bergantung pada jenis material dan nilainya dapat ditentukan melalui eksperimen.

Di dalam makalah ini, akan diajukan pengujian akurasi dari ketiga model di atas ketika diterapkan pada material berpori menggunakan Wolfram Mathematica. Wolfram Mathematica merupakan perangkat lunak yang dapat melakukan komputasi matematik baik secara simbolik maupun secara numerik. Dalam beberapa penelitian, Wolfram Mathematica juga telah banyak diterapkan untuk mengkaji karakteristik material berpori. Karena selain “berhitung”, Wolfram Mathematica juga menyediakan fitur pengolahan citra untuk menganalisis morfologi pori (Tiandho, 2017). Keunggulan dari perangkat lunak ini dibandingkan dengan perangkat lunak untuk melakukan komputasi matematik lainnya terletak pada bahasa pemrogramannya yang relatif sederhana dan mudah dipahami (Wolfram, 2003; McCaslin & Kesireddy, 2015). Diharapkan dengan kemudahan bahasa pemrograman tersebut, maka kajian komputasi dapat

dilakukan oleh para peneliti yang tidak begitu menguasai bahasa pemrograman komputer.

METODE PENELITIAN

Untuk dapat melakukan analisis hubungan antara porositas dan modulus Young dalam artikel ini digunakan data-data yang berasal dari eksperimen peneliti sebelumnya, yaitu dari Panakkal dkk. (1990) (Asmani, et al., 2001) untuk material serbuk besi terkompaksi, Asmani dkk. (2001) untuk material keramik alumina, dan Zugic dkk. (1997) untuk material kristal tunggal nikel. Karena data-data tersebut disajikan dalam bentuk citra grafik maka sebelumnya dilakukan pengolahan citra menggunakan *ImageJ* agar diperoleh informasi data secara kuantitatif. Konstanta-konstanta dalam model yang akan diuji ditentukan secara empiris berdasarkan analisis regresi. Dalam proses analisis yang berjenis non-linier, Wolfram Mathematica menyediakan dukungan analisis berdasarkan algoritma Levenberg-Marquardt. Metode ini merupakan metode alternatif dari Gauss-Newton yang bekerja berdasarkan fungsi minimum, $F(x)$ sebagai jumlah kuadrat fungsi non-linier,

$$F(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [f_i(x)]^2 \tag{4}$$

Untuk menyelesaikan metode tersebut dibentuklah suatu matriks dengan Jacobian $f_i(x)$ dinotasikan sebagai $J_i(x)$ sehingga arah penyelesaian metode Levenberg-Marquardt akan diberikan oleh persamaan,

$$(J_k^T J_k + \lambda_k I) p_k = -J_k^T f_k \tag{5}$$

dengan λ_k adalah skalar non-negatif dan I adalah matriks identitas.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil analisis citra untuk grafik hubungan antara porositas dengan modulus Young pada serbuk besi terkompaksi terdapat pada Tabel 1.

Tabel 1. Hubungan antara porositas dengan modulus Young pada serbuk besi terkompaksi

Porositas (%)	Modulus Young (GPa)
0	207,2
2,9	194,5
3,0	190,0
3,2	186,0
4,0	187,5
3,5	191,0
4,1	177,5
7,4	178,0
7,6	173,5
7,7	169,5
7,8	171,0
7,8	168,0
7,9	164,0
12,0	152,0
12,1	145,0
12,2	142,0
12,4	137,0
12,6	135,0
12,7	132,0
21,6	86,64

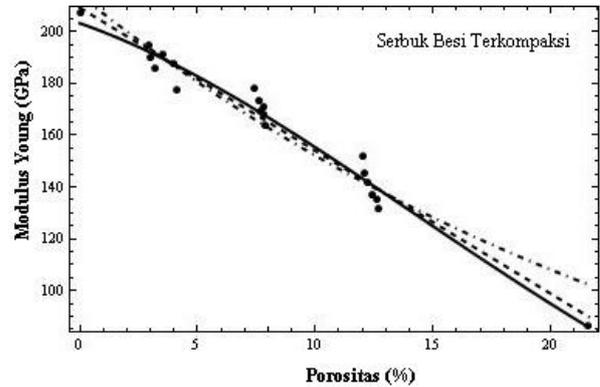
Dari komparasi antara data pada Tabel 1 dengan model pada pers. (1) - (3) berdasarkan algoritma Levenberg-Marquardt dapat diketahui bahwa secara empiris ungkapan model-model tersebut untuk material serbuk besi terkompaksi masing-masing adalah,

$$E(P) = 214,5 \exp(-0,0341657P) \tag{6}$$

$$E(P) = 203,234 \exp(-0,0157129P - 0,00111634P^2) \tag{7}$$

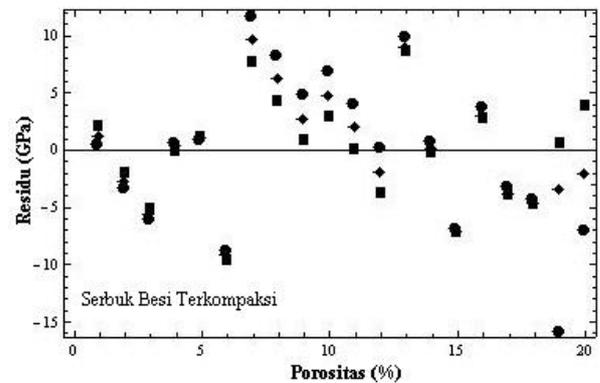
$$E(P) = 209,227(1 - 0,0263771P) \tag{8}$$

Sehingga perbandingan antara ketiga model tersebut terhadap data eksperimen pada Tabel 1 dapat ditunjukkan oleh Gambar 1.



Gambar 1. Hubungan antara porositas dengan modulus Young dari serbuk besi terkompaksi. Tanda ●: data eksperimen, garis [---]: kurva dari pers. (6), garis [—]: kurva dari pers. (7), dan [-.-]: kurva dari pers. (8).

Adapun untuk melihat keakurasian model yang diajukan maka dihitung residu dari masing-masing model tersebut. Plot dari residu terhadap porositas seperti ditunjukkan pada Gambar 2. Melalui data residu yang telah diperoleh dapat diketahui bahwa rata-rata harga mutlak residu untuk model pada pers. (6) adalah 5,675 GPa, untuk pers. (7) adalah 3,777 GPa, dan untuk pers. (8) adalah 4,239 GPa. Dari ketiga nilai harga mutlak residu tersebut dapat disimpulkan bahwa untuk material serbuk besi terkompaksi pers. (7) memberikan akurasi yang paling baik.



Gambar 2. Hubungan porositas terhadap residu dari model yang diterapkan pada serbuk besi terkompaksi. Tanda ●: model pada pers. (6), tanda ■: model pada pers. (7), dan tanda ◆: model pada pers. (8).

Untuk material keramik alumina, setelah melalui proses pengolahan citra menggunakan *ImageJ*

diperoleh data hubungan antara porositas dengan modulus Young seperti terdapat pada Tabel 2.

Tabel 2. Hubungan antara porositas dengan modulus Young pada keramik alumina

Porositas (%)	Modulus Young (GPa)
1,78	389,56
1,97	385,71
3,90	367,03
4,92	345,05
7,92	321,43
9,81	302,2
11,82	279,62
18,26	217,03
24,58	170,89

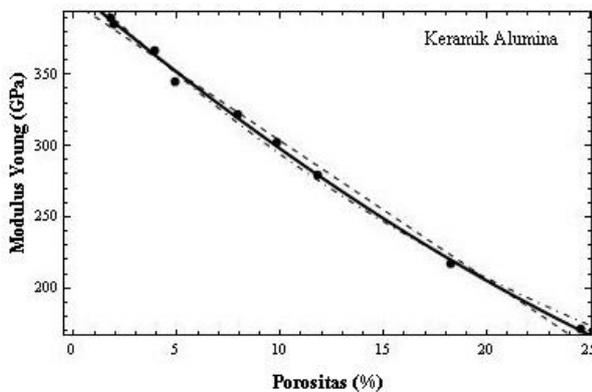
Seperti pada serbuk besi terkompaksi, dengan menerapkan algoritma Levenberg-Marquardt dapat diperoleh solusi dari pers. (1) - (3) untuk material keramik alumina secara eksplisit sebagai,

$$E(P) = 416,977 \exp(-0,0350171P) \quad (9)$$

$$E(P) = 409,403 \exp(-0,0291876P - 0,0002688P^2) \quad (10)$$

$$E(P) = 400,391(1 - 0,024253P) \quad (11)$$

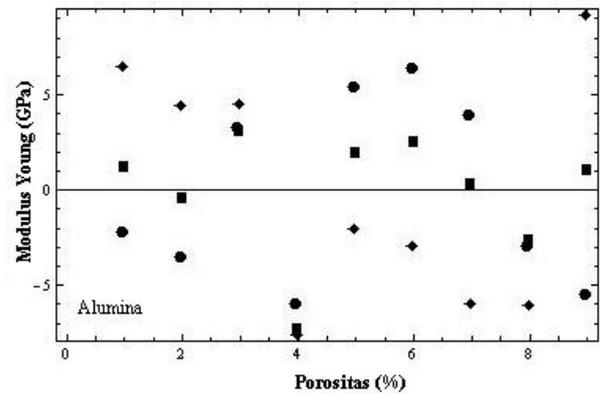
Adapun untuk perbandingan ketiga model tersebut terhadap data eksperimen diberikan oleh Gambar 3. Melalui hasil tersebut dapat dilihat bahwa ketiga model dapat memberikan hasil yang cukup baik. Keseluruhan kurva yang dihasilkan oleh ketiga model di atas dapat memberikan pendekatan yang cukup baik terhadap hasil eksperimen.



Gambar 3. Hubungan antara porositas dengan modulus Young dari keramik alumina. Tanda ●: data eksperimen, garis [---]: kurva dari pers. (9), garis [—]: kurva dari pers. (10), dan [-.-]: kurva dari pers. (11).

Untuk melihat tingkat akurasi ketiga model pada pers. (9) - (11) secara lebih teliti dapat dilakukan dengan menganalisis residu yang dihasilkan dari ketiga model tersebut seperti ditunjukkan oleh Gambar 4. Dari data residu yang telah diperoleh dapat diketahui bahwa rata-rata harga mutlak residu dari model pada pers. (9) adalah 4,353 GPa, untuk pers. (10) adalah 2,297 GPa, dan untuk pers. (11) adalah 5,465 GPa. Dari ketiga rata-rata residu tersebut dapat disimpulkan bahwa pada material alumina hubungan eksponensial pada pers. (9) dapat memberikan akurasi yang lebih baik dari model linier pada pers. (11). Namun demikian, sama seperti dengan serbuk besi

terkompaksi, ungkapan model eksponensial pada pers. (10) dapat memberikan akurasi yang lebih baik dibandingkan model lainnya.



Gambar 4. Hubungan porositas terhadap residu dari model yang diterapkan pada alumina. Tanda ●: model pada pers. (9), tanda ■: model pada pers. (10), dan tanda ◆: model pada pers. (11).

Dengan menggunakan perangkat lunak pengolah citra ImageJ pada data citra hubungan antara porositas dengan modulus Young dari material kristal tunggal nikel maka diperoleh data seperti ditunjukkan pada Tabel 3.

Tabel 3. Hubungan antara porositas dengan modulus Young pada material kristal tunggal nikel.

Porositas (%)	Modulus Young (GPa)
0	115,21
1,79	83,97
3,55	67,73
5,28	62,98
7,04	59,23
8,80	55,73

Sama seperti pada kedua material berpori sebelumnya, analisis konstanta model matematis hubungan antara porositas dengan modulus Young dapat diperoleh secara empiris melalui analisis regresi dengan algoritma Levenberg-Marquardt. Sehingga setelah melalui serangkaian proses dengan perangkat lunak Wolfram Mathematica, secara berurutan, diperoleh ungkapan eksplisit dari ketiga model matematis tersebut sebagai,

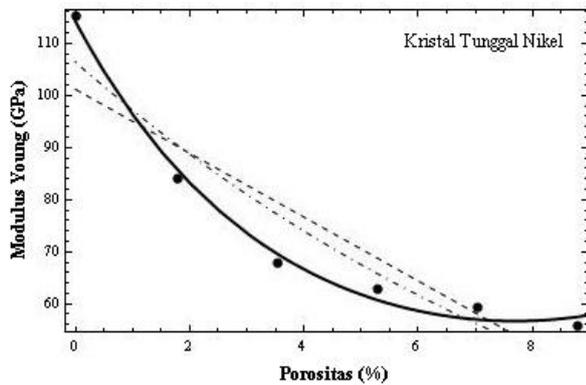
$$E(P) = 106,437 \exp(-0,0910123P) \quad (12)$$

$$E(P) = 114,26 \exp(-0,182136P + 0,0118393P^2) \quad (13)$$

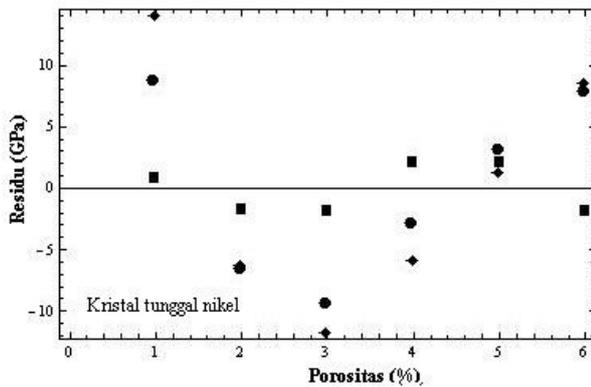
$$E(P) = 101,183(1 - 0,0606009P) \quad (14)$$

Perbandingan dari ketiga model tersebut terhadap data eksperimen pada Tabel 3 ditunjukkan oleh Gambar 5. Secara visual, dari Gambar 5, tampak dengan jelas bahwa dari ketiga model yang diajukan hanya model matematis pada pers. (13) yang dapat memberikan pola cukup baik melewati seluruh data eksperimen yang ada. Hasil tersebut juga diperkuat oleh data rata-rata harga mutlak residu yang dihasilkan oleh ketiga model dan pola residunya seperti ditunjukkan pada Gambar 6. Rata-rata harga mutlak residu pada pers. (12) sebesar 6,417GPa, pada pers. (13) sebesar 1,777 GPa, dan pada pers. (14) sebesar

7,916 GPa. Sehingga dari hasil tersebut dapat disimpulkan bahwa model matematis pada pers. (13) memberikan akurasi yang paling baik dibandingkan yang lainnya.



Gambar 5. Hubungan antara porositas dengan modulus Young dari material kristal tunggal nikel. Tanda ●: data eksperimen, garis [---]: kurva dari pers. (12), garis [—]: kurva dari pers. (13), dan [-.-]: kurva dari pers. (14).



Gambar 6. Hubungan porositas terhadap residu dari model yang diterapkan pada alumina. Tanda ●: model pada pers. (12), tanda ■: model pada pers. (13), dan tanda ◆: model pada pers. (14).

KESIMPULAN

Berdasarkan analisis numerik yang telah dilakukan dapat disimpulkan bahwa Wolfram Mathematica dapat digunakan untuk mengkaji relasi matematis dari porositas terhadap modulus Young dari suatu material berpori. Dengan menggunakan algoritma Levenberg-Marquardt, proses penyelesaian regresi non-linier untuk model-model hubungan antara porositas dengan modulus Young yang diajukan dalam artikel dapat diselesaikan secara efisien. Dari ketiga jenis material yang telah dikaji dapat disimpulkan bahwa model matematis, $E = E_0 \exp(-bP + cP^2)$ merupakan model matematis yang dapat memberikan gambaran hubungan antara porositas dengan modulus Young dengan sangat baik.

REFERENSI

Afriani, F., Dahlan, K., Nikmatin, S. & Zuas, O., 2015. Alginate affecting the characteristics of porous beta-TCP/alginate composite scaffolds. *Journal of*

Optoelectronics and Biomedical Materials, 7(3), pp. 67-76.

Asmani, M., Kermel, C., Leriche, A. & Ourak, M., 2001. Influence of porosity on Young's modulus and Poisson's ratio in alumina ceramics. *Journal of the European Ceramic Society*, Volume 21, pp. 1081-1086.

Chen, L. et al., 2012. Synthesis of nitrogen-doped porous carbon nanofibers as an efficient electrode material for supercapacitors. *ACS Nano*, 6(8), pp. 7092-7102.

Escoto, J., Chiang, Y., Wu, K. & Yamauchi, Y., 2012. Recent progress in mesoporous titania materials: adjusting morphology for innovative applications. *Science and Technology of Advanced Materials*, Volume 13, pp. 013003(1) - (9).

Hollister, S., 2005. Porous scaffold design for tissue engineering. *Nature Materials*, Volume 4, pp. 518-524.

Jana, D., Sundararajan, G. & Chattopadhyay, K., 2017. Effect of porosity on structure, Young's modulus, and thermal conductivity of SiC foams by direct foaming and gelcasting. *Journal of the American Ceramic Society*, Volume 100, pp. 312-322.

Li, L. et al., 2014. Magnetic, superhydrophobic and durable silicone sponges and their application in removal of organic pollutants from water. *Chemical Communications*, Volume 50, pp. 7831-7833.

McCaslin, S. & Kesireddy, A., 2015. Metallographic image processing tools using mathematica manipulate. In: *Innovations and Advances in Computing, Informatics, System Sciences, Networking and Engineering*. Switzerland: Springer International Publishing, pp. 357-363.

Panakkal, J., Willems, H. & Arnold, W., 1990. Nondestructive evaluation of elastic parameters of sintered iron powder compacts. *Journal of Materials Science*, Volume 25, pp. 1397-1402.

Parlett, C., Wilson, P. & Lee, A., 2013. Hierarchical porous materials: catalytic applications. *Chemical Society Reviews*, Volume 42, pp. 3876-3898.

Ringgaard, E. et al., 2015. Development of porous piezoceramics for medical and sensor applications. *Materials*, 8(12), pp. 8877-8889.

Tiandho, Y., 2017. Analisis kuantitatif pori berdasarkan pengolahan citra menggunakan Wolfram Mathematica. *Kumpulan Jurnal Ilmu Komputer (KLIK)*, 4(1), pp. 15-23.

Wolfram, S., 2003. *The Mathematica Book (5th ed.)*. USA: Wolfram Media.

Wu, Y. et al., 2013. Ultralight, flexible, and fire-resistant carbon nanofiber aerogels from bacterial cellulose. *Angewandte Chemie*, Volume 125, pp. 2997-3001.

Yao, X. et al., 2013. Adaptive fluid-infused porous films with tunable transparency and wettability. *Nature Materials*, Volume 12, pp. 529-534.

Zugic, R., Szpunar, B., Krstic, V. & Erb, U., 1997. Effect of porosity on the elastic response of brittle materials: an embedded-atom method approach. *Philosophical Magazine A*, 75(4), pp. 1041-1055.