RUANG ORLICZ-MORREY LEMAH VERSI KETIGA

Al Azhary Masta[1,2]

[1)] Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Bandung
Jalan. Ganesha no. 10, Bandung, Jawa Barat, 40132
[2)] Permanet Address: Departemen Pendidikan Matematika, Fakultas Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Pendidikan Indonesia.
Jalan. Dr. Setiabudi no. 229, Bandung, Jawa Barat, 40154

[a)] *email korespondensi: alazhari.masta@upi.edu/ al_math_bangka@yahoo.com*

ABSTRAK

Pada artikel ini, penulis akan memperkenalkan ruang Orlicz-Morrey lemah versi ketiga sebagai perluasan dari ruang Orlicz-Morrey (kuat) versi ketiga. Seperti ruang Orlicz-Morrey lemah versi pertama dan kedua, ruang Orlicz-Morrey lemah versi ketiga dipandang sebagai perumuman dari ruang Orlicz lemah, ruang Morrey lemah, dan ruang Morrey lemah diperumum. Lebih jauh, pada artikel ini penulis akan mengkaji beberapa sifat yang ada pada ruang Orlicz-Morrey lemah versi ketiga. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode yang klasik serupa dalam mengkaji sifat-sifat pada ruang Orlicz-Morrey lemah versi pertama dan kedua.

Kata kunci: *Ruang Orlicz-Morrey kuat, ruang Orlicz-Morrey lemah.*

PENDAHULUAN

Ruang Orlicz-Morrey merupakan perpaduan antara ruang Orlicz dan ruang Morrey yang pertama kali diperkenalkan oleh E. Nakai pada tahun 2004 [4,6,16,20,21]. Misalkan G adalah adalah koleksi semua fungsi $\phi:(0,\infty)\rightarrow(0,\infty)$ dengan $\phi(r)$ monoton tak turun dan $\frac{\phi(r)}{r}$ monoton tak naik. Notasi O dinyatakan sebagai hmpunan semua bola buka $B=B(a,r)$ yang berpusat di $\in\mathbb{R}^n$ dan berjari – jari $r>0$.

Misalkan Φ adalah fungsi Young dan $\phi\in G$, ruang Orlicz-Morrey (kuat) versi Nakai $L_{\phi,\Phi}(\mathbb{R}^n)$ didefinisikan sebagai koleksi fungsi $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ yang memenuhi

$$\|f\|_{L_{\phi,\Phi}} := \operatorname*{Sup}_{B\in O}\|f\|_{\phi,\Phi,B} < \infty$$

dengan

$$\|f\|_{\Phi,\phi,B} \coloneqq inf\left\{b>0\colon \frac{\phi(|B|)}{|B|}\int_B \Phi\left(\frac{|f(x)|}{b}\right)dx\le 1\right\}.$$

Jika dipilih $\phi(t)=t$ maka diperoleh $L_{\phi,\Phi}(\mathbb{R}^n)$ = $L_\Phi(\mathbb{R}^n)$, yakni ruang Orlicz. Lebih jauh, jika dipilih $\phi(t)=t$ dan $\Phi(x)=|x|^p$, $p\ge 1$ maka $L_{\phi,\Phi}(\mathbb{R}^n)$ = $L_p(\mathbb{R}^n)$ adalah ruang Lebesgue. Selain itu, jika $\phi(t)=\frac{1}{\psi(t^{\frac{1}{n}})^p}$ (dimana $\psi:(0,\infty)\longrightarrow(0,\infty)$ adalah fungsi monoton turun tetapi $t^{\frac{n}{p}}\ \psi(t)$ fungsi monoton naik) dan $\Phi(t)=t^p$ maka diperoleh $L_{\phi,\Phi}(\mathbb{R}^n)$ = $M_{p,\psi}(\mathbb{R}^n)$, yakni ruang Morrey diperumum yang diperkenalkan oleh Nakai pada tahun 1994. Hal ini menunjukkan ruang $L_{\phi,\Phi}(\mathbb{R}^n)$ adalah perumuman dari ruang Orlicz dan ruang Morrey, secara langsung juga merupakan perumuman ruang Lebesgue.

Sedangkan ruang Orlicz-Morrey lemah versi Nakai dinyatakan sebagai himpunan semua fungsi terukur f yang memenuhi

$$\|f\|_{\Phi,\phi,B,w} \coloneqq inf\left\{b>0\colon \operatorname*{Sup}_{t>0}\frac{\phi(|B|)\Phi(t)\left|\left\{x\in B\colon \frac{|f(x)|}{b}>t\right\}\right|}{|B|}\le 1\right\}<\infty.$$

untuk sembarang bola buka $B=B(a,r)$ pada O.

Ruang Orlicz-Morrey lemah $wL_{\phi,\Phi}(\mathbb{R}^n)$ merupakan ruang quasi-Banach yang dilengkapi dengan quasi-norm $\|f\|_{wL_{\phi,\Phi}} := \mathrm{Sup}_{B\in O}\|f\|_{\phi,\Phi,B,w}$.

Seperti pada ruang $L_{\phi,\Phi}(\mathbb{R}^n)$, jika dipilih $\phi(t)=t$ maka diperoleh $wL_{\phi,\Phi}(\mathbb{R}^n)$ = $wL_\phi(\mathbb{R}^n)$, yakni ruang Orlicz lemah. Begitu juga, jika $\phi(t)$ = $\frac{1}{\psi(t^{\frac{1}{n}})^p}$ (dimana $\psi:(0,\infty)\longrightarrow(0,\infty)$ adalah fungsi monoton turun, tetapi $t^{\frac{n}{p}}\ \psi(t)$ fungsi monoton naik) dan $\Phi(t)=t^p$ maka diperoleh $wL_{\phi,\Phi}(\mathbb{R}^n)$ = $wM_{p,\psi}(\mathbb{R}^n)$, yakni ruang Morrey lemah diperumum. Hal ini menunjukkan ruang $wL_{\phi,\Phi}(\mathbb{R}^n)$ adalah perumuman dari ruang Orlicz lemah dan ruang Morrey lemah.

Versi kedua ruang Orlicz-Morrey (kuat) diperkenalkan oleh Sawano, Sugano, dan Tanaka pada tahun 2012 [23,24]. Misalkan G_1 adalah koleksi semua fungsi $\psi:(0,\infty)\rightarrow(0,\infty)$ dengan $\psi(r)$ monoton tak turun tetapi $\frac{\psi((r+s)^n)}{\Psi^{-1}((\frac{r+s}{s})^n)}$ monoton tak naik untuk setiap $s>0$. Untuk fungsi Young Φ dan $\psi\in G_1$, ruang Orlicz-Morrey $M_{\psi,\Psi}(\mathbb{R}^n)$ (versi Sawano dkk.) didefinisikan sebagai koleksi fungsi $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ yang memenuhi

$$\|f\|_{M_{\psi,\Psi}} := \operatorname*{Sup}_{B\in O}\psi(|B|)\|f\|_{\Psi,B} < \infty$$

dengan

$$\|f\|_{\Psi,B} \coloneqq inf\left\{b>0\colon \frac{1}{|B|}\int_B \Psi\left(\frac{|f(x)|}{b}\right)dx\le 1\right\}.$$

Adapun ruang Orlicz-Morrey lemah $wM_{\psi,\Psi}(\mathbb{R}^n)$ didefinisikan sebagai himpunan semua fungsi terukur f yang memenuhi

$$\|f\|_{\Psi,B,w} := inf\left\{b>0: \operatorname*{Sup}_{t>0}\frac{\Psi(t)\left|\left\{x\in B: \frac{|f(x)|}{b}>t\right\}\right|}{|B|}\le 1\right\}<\infty.$$

untuk sembarang bola buka $B=B(a,r)$ pada O.

Ruang Orlicz-Morrey lemah $wM_{\psi,\Psi}(\mathbb{R}^n)$ merupakan ruang quasi-Banach yang dilengkapi dengan quasi-norm $\|f\|_{wM_{\psi,\Psi}} := \mathrm{Sup}_{B\in O}\ \psi(|B(a,r)|\|f\|_{\Psi,B,w}$.

METODE PENELITIAN

Kajian tentang ruang orlicz, ruang Morrey, Orlicz-Morrey $L_{\phi,\Phi}(\mathbb{R}^n)$ dan $M_{\psi,\Psi}(\mathbb{R}^n)$ telah banyak dilakukan oleh peneliti – peneliti sebelumnya. Hal ini bisa dilihat pada [1, 3 – 7, 9, 10, 13 – 25, 30 – 35].

Baru-baru ini Guliyev, dkk. [5] mendefinisikan sebuah ruang Orlicz-Morrey (kuat) versi ketiga yang dilengkapi dengan dua parameter θ dan Θ. Misalkan Θ adalah fungsi Young yang bijektif dan G_Θ koleksi semua fungsi $\theta:(0,\infty)\to(0,\infty)$ yang memenuhi sifat $\theta(r)$ monoton turun tetapi $\Theta^{-1}(t^{-n})\theta(t)^{-1}$turun hampir dimana-mana pada bilangan real positif. Ruang Orlicz-Morrey $M_{\theta,\Theta}(\mathbb{R}^n)$ (versi Guliyev, dkk.) adalah koleksi semua fungsi terukur f yang memenuhi sifat

$$\|f\|_{M_{\theta,\Theta}} := \mathrm{Sup}_{B\in O}\ \frac{1}{\theta\left(|B|^{\frac{1}{n}}\right)}\Theta^{-1}\left(\frac{1}{|B|}\right)L_\Theta(B)\ <\ \infty$$

.

Ruang Orlicz-Morrey $M_{\theta,\Theta}(\mathbb{R}^n)$ juga perumuman dari ruang Orlicz, ruang Morrey, dan ruang Lebesgue. Hal tersebut telah ditunjukkan Guliyev pada contoh berikut.

Contoh 1. [5] Misalkan $1\le p\le q<\infty$, Θ fungsi Young yang bijektif, dan $\theta\in G_\Theta$, maka diperoleh

a) Jika $\Theta(t)=t^p$ dan $\theta(t)=t^{\frac{-n}{p}}$, maka $M_{\theta,\Theta}(\mathbb{R}^n)=L_p(\mathbb{R}^n)$ adalah ruang Lebesgue.
b) Jika $\Theta(t)=t^q$ dan $\theta(t)=t^{\frac{-n}{p}}$, maka $M_{\theta,\Theta}(\mathbb{R}^n)=M_{p,\mathrm{q}}(\mathbb{R}^n)$ adalah ruang Morrey klasik.
c) Jika $\Theta(t)=t^p$, maka $M_{\theta,\Theta}(\mathbb{R}^n)=M_{\theta,\mathrm{p}}(\mathbb{R}^n)$ adalah ruang Morrey diperumum.
d) Jika $\theta(t)=\Theta^{-1}(t^{-n})$, maka $M_{\theta,\Theta}(\mathbb{R}^n)=L_\Theta(\mathbb{R}^n)$adalah ruang Orlicz.

Catatan. Dalam beberapa hal ruang Orlicz-Morrey $L_{\phi,\Phi}(\mathbb{R}^n)$, $M_{\psi,\Psi}(\mathbb{R}^n)$, dan $M_{\theta,\Theta}(\mathbb{R}^n)$ berbeda, salah satunya parameter yang berpengaruh pada sifat inklusi diruang-ruang tersebut. Hal ini bisa dilihat pada[17].

Berdasarkan hasil kajian penulis, ruang Orlicz-Morrey $M_{\theta,\Theta}(\mathbb{R}^n)$ versi Guliyev dkk. masih membahas untuk fungsi-fungsi yang terintegralkan Lebegue. Oleh karena itu, melanjutkan hasil penelitian yang sudah dilakukan oleh peneliti-peneliti sebelumnya, penulis tertarik mendefinisikan ruang Orlicz-Morrey lemah versi Guliyev dkk. Lebih jauh penulis akan mengkaji beberapa sifat pada ruang tersebut dan melihat keterkaitannya dengan ruang Orlicz-Morrey (kuat) $M_{\theta,\Theta}(\mathbb{R}^n)$.

Hasil – hasil terkait pengkajian penulis tentang ruang Orlicz-Morrey lemah versi Guliyev dkk. akan disampaikan pada bab selanjutnya. Sedangkan metode yang digunakan dalam penelitian ini serupa dengan metode-metode klasik yang diterapkan pada ruang Orlicz-Morrey lemah $wL_{\phi,\Phi}(\mathbb{R}^n)$ dan $wM_{\psi,\Psi}(\mathbb{R}^n)$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pertama, pada bagian ini penulis akan mendefinisikan terlebih dahulu ruang Orlicz-Morrey lemah versi Guliyev dkk.

Misalkan Θ adalah fungsi Young yang bijektif dan G_Θ koleksi semua fungsi $\theta:(0,\infty)\to(0,\infty)$ yang memenuhi sifat $\theta(r)$ monoton turun tetapi $\Theta^{-1}(t^{-n})\theta(t)^{-1}$ turun hampir dimana-mana pada bilangan real positif. Ruang Orlicz-Morrey lemah $wM_{\theta,\Theta}(\mathbb{R}^n)$ adalah koleksi semua fungsi terukur f yang memenuhi sifat

$$\|f\|_{wM_{\theta,\Theta}} := \operatorname*{Sup}_{B\in O}\frac{1}{\theta\left(|B|^{\frac{1}{n}}\right)}\Theta^{-1}\left(\frac{1}{|B|}\right)\|f\|_{wL_\Theta(B)}\ <\ \infty$$

dengan

$$\|f\|_{wL_\Theta(B)} := inf\left\{b>0: \operatorname*{Sup}_{t>0}\Theta(t)\left|\left\{x\in B: \frac{|f(x)|}{b}>t\right\}\right|\le 1\right\}.$$

Perhatikan bahwa, untuk sembarang $B\in O$ maka diketahui $\|f\|_{wL_\Theta(B)}$ adalah quasi-norm (lihat pada [1, 10, 13]), yakni memenuhi sifat berikut.

a. $\|f\|_{wL_\Theta(B)}\ge 0$, untuk sembarang $f\in wL_\Theta(B)$.
b. $\|f\|_{wL_\Theta(B)}=0$ jika dan hanya jika $f=0$ hampir dimana-mana pada bola buka B.
c. $\|Cf\|_{wL_\Theta(B)}=C\|f\|_{wL_\Theta(B)}$ untuk sembarang konstanta $C\in\mathbb{R}$.
d. $\|f+g\|_{wL_\Theta(B)}\le 2\left(\|f\|_{wL_\Theta(B)}+\|g\|_{wL_\Theta(B)}\right)$ untuk sembarang $f,g\in wL_\Theta(B)$.

Berdasarkan sifat di atas maka diperoleh lema berikut.

Lema 2. *Misalkan Θ adalah fungsi Young yang bijektif dan $\theta\in G_\Theta$, maka $\|\cdot\|_{wM_{\theta,\Theta}}$ adalah quasi-norm pada ruang $wM_{\theta,\Theta}(\mathbb{R}^n)$.*

Bukti.

Ambil sembarang $f,g\in wM_{\theta,\Theta}(\mathbb{R}^n)$ dan $C\in\mathbb{R}$.

a. Karena $\|f\|_{wL_\Theta(B)}\ge 0$ dan $\theta(t)$, $\Theta^{-1}(t)$ selalu bernilai positif untuk setiap $t>0$, maka diperoleh

$$\|f\|_{wM_{\theta,\Theta}} := \mathrm{Sup}_{B\in O}\ \frac{1}{\theta\left(|B|^{\frac{1}{n}}\right)}\Theta^{-1}\left(\frac{1}{|B|}\right)\|f\|_{wL_\Theta(B)}\ge 0.$$

b. Misalkan $\|f\|_{wM_{\theta,\Theta}}=0$, maka diperoleh $\frac{1}{\theta\left(|B|^{\frac{1}{n}}\right)}\Theta^{-1}\left(\frac{1}{|B|}\right)\|f\|_{wL_\Theta(B)}=0$ untuk sembarang bola buka $B\in O$. Karena $\theta(t)$, $\Theta^{-1}(t)$ selalu bernilai positif untuk setiap $t>0$, maka haruslah $\|f\|_{wL_\Theta(B)}=0$. Akibatnya diperoleh $f=0$ hampir dimana-mana pada bola buka B. Selanjutnya, misalkan $f=0$ hampir dimana-mana pada bola buka B, maka diperoleh $\|f\|_{wL_\Theta(B)}=0$. Karena hal ini berlaku untuk sembarang bola buka $B\in O$, maka dapat disimpulkan $\|f\|_{wM_{\theta,\Theta}}=0$.

c. Perhatikan bahwa, untuk sembarang $C \in \mathbb{R}$ diperoleh

$$\|Cf\|_{wM_{\theta,\Theta}}:$$

$$= \operatorname*{Sup}_{B\in O} \frac{1}{\theta\left(|B|^{\frac{1}{n}}\right)} \Theta^{-1}\left(\frac{1}{|B|}\right) \|Cf\|_{wL_{\Theta}(B)}$$

$$= \operatorname{Sup}_{B\in O} \frac{1}{\theta\left(|B|^{\frac{1}{n}}\right)} \Theta^{-1}\left(\frac{1}{|B|}\right) |C| \|f\|_{wL_{\Theta}(B)}$$

$$= |C| \ \operatorname{Sup}_{B\in O} \frac{1}{\theta\left(|B|^{\frac{1}{n}}\right)} \Theta^{-1}\left(\frac{1}{|B|}\right) \|f\|_{wL_{\Theta}(B)}$$

$$= |C| \|f\|_{wM_{\theta,\Theta}}.$$

d. Selanjutnya, perhatikan bahwa

$$\operatorname*{Sup}_{B\in O} \frac{1}{\theta\left(|B|^{\frac{1}{n}}\right)} \Theta^{-1}\left(\frac{1}{|B|}\right) \|f+g\|_{wL_{\Theta}(B)}$$

$$\leq \operatorname{Sup}_{B\in O} \frac{1}{\theta\left(|B|^{\frac{1}{n}}\right)} \Theta^{-1}\left(\frac{1}{|B|}\right) 2\left(\|f\|_{wL_{\Theta}(B)} + \|g\|_{wL_{\Theta}(B)}\right)$$

$$\leq 2\left(\operatorname{Sup}_{B\in O} \frac{1}{\theta\left(|B|^{\frac{1}{n}}\right)} \Theta^{-1}\left(\frac{1}{|B|}\right) \|f\|_{wL_{\Theta}(B)} + \operatorname{Sup}_{B\in O} \frac{1}{\theta\left(|B|^{\frac{1}{n}}\right)} \Theta^{-1}\left(\frac{1}{|B|}\right) \|g\|_{wL_{\Theta}(B)}\right)$$

$$= 2\left(\|f\|_{wM_{\theta,\Theta}} + \|g\|_{wM_{\theta,\Theta}}\right).$$

Berdasarkan point a , b, c, dan d maka diperoleh $\|\cdot\|_{wM_{\theta,\Theta}}$ adalah quasi-norm pada ruang $wM_{\theta,\Theta}(\mathbb{R}^n)$. ■

Selanjutnya, keterkaitan antara ruang Orlicz-Morrey $M_{\theta,\Theta}(\mathbb{R}^n)$ dan $wM_{\theta,\Theta}(\mathbb{R}^n)$ dinyatakan pada teorema berikut.

Teorema 3. *Misalkan Θ adalah fungsi Young yang bijektif dan $\theta \in G_{\Theta}$, maka diperoleh*

$$M_{\theta,\Theta}(\mathbb{R}^n) \subseteq wM_{\theta,\Theta}(\mathbb{R}^n)$$

dengan $\|f\|_{wM_{\theta,\Theta}} \leq \|f\|_{M_{\theta,\Theta}}$ untuk setiap $f \in M_{\theta,\Theta}(\mathbb{R}^n)$.

Bukti.

Ambil sembarang $f \in M_{\theta,\Theta}(\mathbb{R}^n)$, dengan argumen yang serupa pada [15,16,17] maka dapat dibuktikan

$$\|f\|_{wL_{\Theta}(B)} \leq \|f\|_{L_{\Theta}(B)}$$

untuk sembarang bola buka $B \in O$. Karena ini berlaku untuk sembarang bola buka $B \in O$, maka diperoleh

$$\|f\|_{wM_{\theta,\Theta}} := \operatorname*{Sup}_{B\in O} \frac{1}{\theta\left(|B|^{\frac{1}{n}}\right)} \Theta^{-1}\left(\frac{1}{|B|}\right) \|f\|_{wL_{\Theta}(B)}$$

$$\leq \operatorname{Sup}_{B\in O} \frac{1}{\theta\left(|B|^{\frac{1}{n}}\right)} \Theta^{-1}\left(\frac{1}{|B|}\right) \|f\|_{L_{\Theta}(B)}$$

$$= \|f\|_{M_{\theta,\Theta}}.$$

Jadi diperoleh $\|f\|_{wM_{\theta,\Theta}} \leq \|f\|_{M_{\theta,\Theta}}$. Hal ini menunjukkan $M_{\theta,\Theta}(\mathbb{R}^n) \subseteq wM_{\theta,\Theta}(\mathbb{R}^n)$. ■

Seperti pada ruang Orlicz-Morrey $M_{\theta,\Theta}(\mathbb{R}^n)$, contoh berikut menunjukkan ruang Orliz-Morrey lemah $wM_{\theta,\Theta}(\mathbb{R}^n)$ merupakan perumuman dari ruang Orlicz lemah, ruang Morrey lemah, ruang Morrey lemah diperumum, dan ruang Lebesgue lemah.

Contoh 4. Misalkan $1 \leq p \leq q < \infty$, Θ fungsi Young yang bijektif, dan $\theta \in G_{\Theta}$, maka diperoleh

a) Jika $\Theta(t) = t^p$ dan $\theta(t) = t^{\frac{-n}{p}}$, maka $wM_{\theta,\Theta}(\mathbb{R}^n) = wL_p(\mathbb{R}^n)$ adalah ruang Lebesgue lemah.

b) Jika $\Theta(t) = t^q$ dan $\theta(t) = t^{\frac{-n}{p}}$, maka $wM_{\theta,\Theta}(\mathbb{R}^n) = wM_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ adalah ruang Morrey lemah.

c) Jika $\Theta(t) = t^p$, maka $wM_{\theta,\Theta}(\mathbb{R}^n) = wM_{\theta,p}(\mathbb{R}^n)$ adalah ruang Morrey lemah diperumum.

d) Jika $\theta(t) = \Theta^{-1}(t^{-n})$, maka $wM_{\theta,\Theta}(\mathbb{R}^n) = wL_{\Theta}(\mathbb{R}^n)$adalah ruang Orlicz lemah.

Selanjutnya, lema berikut menunjukkan fungsi karakteristik pada bola buka di $\mathbb{R}^n$ merupakan anggota dari ruang $wM_{\theta,\Theta}(\mathbb{R}^n)$.

Lema 5. *Misalkan Θ fungsi Young yang bijektif, $\theta \in G_{\Theta}$, dan $r_o > 0$, maka terdapat $C > 1$ sedemikian sehingga berlaku*

$$\frac{1}{\theta(r_o)} \leq \| \chi_{B(0,r_o)} \|_{wM_{\theta,\Theta}} \leq \frac{C}{\theta(r_o)}.$$

Bukti.

Misalkan Θ adalah fungsi Young yang bijektif dan $\theta \in G_{\Theta}$. Berdasarkan Proposisi 2.1 pada [5] maka terdapat $C > 1$ sedemikian sehingga berlaku

$$\frac{1}{\theta(r_o)} \leq \| \chi_{B(0,r_o)} \|_{M_{\theta,\Theta}} \leq \frac{C}{\theta(r_o)}$$

untuk sembarang $r_o > 0$. Selanjutnya, berdasarkan Teorema 3 maka diperoleh

$$\| \chi_{B(0,r_o)} \|_{wM_{\theta,\Theta}} \leq \| \chi_{B(0,r_o)} \|_{M_{\theta,\Theta}} \leq \frac{C}{\theta(r_o)}.$$

Sekarang, amati bahwa

$$\left\|\chi_{B(0,r_o)}\right\|_{wM_{\theta,\Theta}}:$$

$$= \operatorname*{Sup}_{B\in O} \frac{1}{\theta\left(|B|^{\frac{1}{n}}\right)} \Theta^{-1}\left(\frac{1}{|B|}\right) \left\|\chi_{B(0,r_o)}\right\|_{wL_{\Theta}(B)}$$

$$= \operatorname{Sup}_{B\in O} \frac{1}{\theta\left(|B|^{\frac{1}{n}}\right)} \Theta^{-1}\left(\frac{1}{|B|}\right) \left\|\chi_{B(0,r_o)}\right\|_{wL_{\Theta}(B)}$$

$$= \operatorname{Sup}_{B\in O} \frac{1}{\theta\left(|B|^{\frac{1}{n}}\right)} \Theta^{-1}\left(\frac{1}{|B|}\right) \frac{1}{\Theta^{-1}\left(\frac{1}{|B\cap B(0,r_o)|}\right)}$$

$$\geq \frac{1}{\theta(r_o)}.$$

Jadi, terbukti bahwa

$$\frac{1}{\theta(r_o)} \leq \| \chi_{B(0,r_o)} \|_{wM_{\theta,\Theta}} \leq \frac{C}{\theta(r_o)}.$$

untuk sembarang $r_o > 0$. ■

Berikut akan diberikan bentuk ketaksamaan Hölder pada ruang Orlicz-Morrey lemah $M_{\theta,\Theta}(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 6. *Misalkan $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ adalah fungsi Young yang bijektif dan $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in G_{\Theta}$ sedemikian sehingga berlaku*

$$\Theta_1^{-1}(t)\Theta_2^{-1}(t) = \Theta_3^{-1}(t)$$

dan

$$\theta_1(t)\, \theta_2(t) \leq \theta_3(t)$$

untuk setiap $t \geq 0$. Jika $f \in wM_{\theta_1,\Theta_1}(\mathbb{R}^n)$ dan $g \in wM_{\theta_2,\Theta_2}(\mathbb{R}^n)$, maka diperoleh $fg \in wM_{\theta_3,\Theta_3}(\mathbb{R}^n)$

dengan

$$\| fg \|_{wM_{\theta_3,\Theta_3}} \le 2 \| f \|_{wM_{\theta_1,\Theta_1}} \| g \|_{wM_{\theta_2,\Theta_2}}.$$

Bukti.

Ambil sembarang $f \in wM_{\theta_1,\Theta_1}(\mathbb{R}^n)$ dan $g \in wM_{\theta_2,\Theta_2}(\mathbb{R}^n)$. Karena berlaku $\Theta_1^{-1}(t)\Theta_2^{-1}(t) = \Theta_3^{-1}(t)$
untuk setiap $t \ge 0$, maka untuk sembarang $B \in O$ diperoleh $\|fg\|_{wL_{\Theta_3}(B)} \le 2\|f\|_{wL_{\Theta_1}(B)}\|g\|_{wL_{\Theta_2}(B)}$. Selanjutnya, diketahui bahwa $\theta_1(t)\,\theta_2(t) \le \theta_3(t)$ untuk setiap $t \ge 0$ maka diperoleh

$$\| fg \|_{wM_{\theta_3,\Theta_3}}$$

$$:= \operatorname*{Sup}_{B\in O} \frac{1}{\theta_3\left(|B|^{\frac{1}{n}}\right)} \Theta_3^{-1}\left(\frac{1}{|B|}\right) \|fg\|_{wL_{\Theta_3}(B)}$$

$$\le \operatorname*{Sup}_{B\in O} \frac{1}{\theta_3\left(|B|^{\frac{1}{n}}\right)} \Theta_3^{-1}\left(\frac{1}{|B|}\right) 2\|f\|_{wL_{\Theta_1}(B)}\|g\|_{wL_{\Theta_2}(B)}$$

$$= \operatorname*{Sup}_{B\in O} \frac{1}{\theta_3\left(|B|^{\frac{1}{n}}\right)} \Theta_1^{-1}\left(\frac{1}{|B|}\right)\Theta_2^{-1}\left(\frac{1}{|B|}\right) 2\|f\|_{wL_{\Theta_1}(B)}\|g\|_{wL_{\Theta_2}(B)}$$

$$\le \operatorname*{Sup}_{B\in O} \frac{1}{\theta_1\left(|B|^{\frac{1}{n}}\right)} \frac{1}{\theta_2\left(|B|^{\frac{1}{n}}\right)} \Theta_1^{-1}\left(\frac{1}{|B|}\right)\Theta_2^{-1}\left(\frac{1}{|B|}\right) 2\|f\|_{wL_{\Theta_1}(B)}\|g\|_{wL_{\Theta_2}(B)}$$

$$\le 2\left(\operatorname{Sup}_{B\in O} \frac{1}{\theta_1\left(|B|^{\frac{1}{n}}\right)} \Theta_1^{-1}\left(\frac{1}{|B|}\right)\|f\|_{wL_{\Theta_1}(B)}\right) \times \left(\operatorname{Sup}_{B\in O} \frac{1}{\theta_2\left(|B|^{\frac{1}{n}}\right)} \Theta_2^{-1}\left(\frac{1}{|B|}\right)\|f\|_{wL_{\Theta_2}(B)}\right)$$

$$= 2 \| f \|_{wM_{\theta_1,\Theta_1}} \| g \|_{wM_{\theta_2,\Theta_2}}. \blacksquare$$

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian yang diperoleh dan pembahasan yang dilakukan penulis maka penulis berkesimpulan bahwa ruang Orlicz-Morrey lemah $wM_{\theta_1,\Theta_1}(\mathbb{R}^n)$ juga merupakan perumuman dari ruang Orlicz lemah, ruang Morrey lemah, dan ruang Morrey lemah diperumum. Lebih jauh ruang tersebut perumuman dari ruang Lebesgue lemah.

Ruang Orlicz-Morrey lemah $wM_{\theta_1,\Theta_1}(\mathbb{R}^n)$ lebih luas dari ruang Orlicz-Morrey (kuat) $M_{\theta_1,\Theta_1}(\mathbb{R}^n)$, hal ini bisa dilihat padaTeorema 3. Selain itu, syarat cukup untuk ketaksamaan Hölder pada ruang $wM_{\theta_1,\Theta_1}(\mathbb{R}^n)$ telah diperoleh (Teorema 6). Namun, syarat untuk kondisi fungsi Young pada ketaksamaan Hölder di ruang $wL_{\phi,\Phi}(\mathbb{R}^n)$ dan $M_{\psi,\Psi}(\mathbb{R}^n)$ lebih sederhana dibandingkan ruang $wM_{\theta_1,\Theta_1}(\mathbb{R}^n)$.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penelitian ini dibiayai oleh dana BOPTN mahasiswa S3 Institut Teknologi Bandung tahun 2016. Oleh karena itu, ucapan terimakasih sebesar-besarnya penulis sampaikan kepada Institut Teknologi Bandung, khususnya Progam Studi Pascasarjana Matematika ITB yang telah mendukung penulis dalam penelitian ini.

REFERENSI

[1]. T.N. Bekjan, Z. Chen, P. Liu, & Y. Jiao, 2011. Noncommutative weak Orlicz spaces and martingale inequalities. *Studia Math.* **204**-3, 195–212.

[2]. R.E. Castillo, F.A.V. Narvaez, & J.C.R. Fernándes, 2015. Multiplication and composition operators on weak L_p spaces. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* **38** – 3, 927 – 973.

[3]. F. Deringoz, V. S. Guliyev, & S. Samko, 2014. Boundedness of the maximal and singular operators on generalized Orlicz-Morrey spaces. *In: Operator Theory, Operator Algebra and Applications, Operator Theory: Advances and Applications* **242**, 139 – 158.

[4]. S. Gala, Y. Sawano, & H. Tanaka, 2015. A remark on two generalized Orlicz-Morrey spaces. *J. Approx. Theory* **198**, 1 – 9.

[5]. V. S. Guliyev, S. G. Hasanov, Y. Sawano, & T. Noi, 2017. Non-smooth atomic decompositions for generalized Orlicz-Morrey spaces of the third kind'. *Acta Appl. Math*. **145** – 1, 133--174 [DOI: 10.1007/s10440-016-0052-7].

[6]. H. Gunawan, D.I. Hakim, K.M. Limanta, & A.A. Masta, 2017. Inclusion properties of generalized Morrey spaces. *Math. Nachr.* **290** (2017), 332-340. doi:10.1002/mana.201500425.

[7]. H. Gunawan H, E. Kikianty, & C. Schwanke, 2017. Discrete Morey spaces and their inclusion properties *Research Report (https://arxiv.org/abs/1605.00217)*

[8]. V. Gol'dshtein & A. Ukhlov, 2009 Weighted Sobolev spaces and embedding theorems *Trans. Amer. Math. Soc.*, **361**-7 3829 – 3850.

[9]. Ifronika, M. Idris, A.A. Masta, & H. Gunawan, 2016. Generalized Hölder's inequality on Morrey spaces, submitted.

[10]. Y. Jiao, 2011. Embeddings between weak Orlicz martingale spaces. *J. Math. Appl.* **378**, 220–229.

[11]. R. Hopkins, 2015. Finite metric spaces and their embedding into Lebesgue spaces Research Report (http://math.uchicago.edu/~may/REU2015/REUPapers/Hopkins.pdf)

[12]. T. Kühn, 2008. Entropy numbers in sequence spaces with an application to weighted function spaces *J. Approx.Theory* **153** 40 – 52.

[13]. N. Liu and Y. Ye, "Weak Orlicz space and its convergence theorems", *Acta Math. Sci. Ser.* ***B*** **30**-5 (2010), 1492–1500.

[14]. A. A. Masta, H. Gunawan, & W. Setya-Budhi, 2015. An inclusion property of Orlicz spaces Proc. The 5th Annual Basic Science International Conference 2015, volume 5 dengan ISSN : 2338-0128, 274 – 276

[15]. A.A. Masta, H. Gunawan, & W. Setya-Budhi, 2016. Inclusion property of Orlicz and weak Orlicz spaces. *J. Math. Fund. Sci*. **48**-3, 193–203.

[16]. A.A. Masta, H. Gunawan, W.S. Budhi, 2017. An inclusion property of Orlicz-Morrey spaces. to appear in *J. Phys.: Conf. Ser.*.

[17]. A. A. Masta, H. Gunawan and W. Setya-Budhi, 2017. On inclusion properties of Two versions of Orlicz-Morrey spaces submitted to *Mediterranean J. Math*.

[18]. A. A. Masta, H. Gunawan and S. W. Indratno, 2017. Generalized Hölder's inequality on Orlicz-Morrey spaces, in preparation.

[19]. C.B. Morrey, 1938. On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations. *Trans. Amer. Math. Soc.* **43**, 126 – 166.

[20]. E. Nakai, 2004. On Orlicz-Morrey spaces. Research Report [http://repository.kulib.kyoto-u.ac.jp/dspace/bitstream/2433/58769/1/ 1520-10.pdf, accessed on August 17, 2015.]

[21]. E. Nakai, 2006. Orlicz-Morrey spaces and some integral operators. Research Report [http://repository.kulib.kyoto-u.ac.jp/dspace/ bitstream/2433/26035/1/1399-13.pdf, accessed on August 17, 2015.]

[22]. A. Osançliol, 2014. Inclusion between weighted Orlicz spaces. *J. Inequal. Appl.* **2014**-390, 1–8.

[23]. Y. Sawano, S. Sugano, & H. Tanaka, 2012. Orlicz-Morrey spaces and fractional operators. *Potential Anal.* **36** – 4, 517 – 556.

[24]. Y. Sawano, D.I. Hakim, & H. Gunawan, Non-smooth atomic decomposition for generalized 2015. Orlicz-Morrey spaces. *Math. Nachr*. **288** (14-15), 1741--1775.

[25]. X. Zhang and C. Zhang, 2011. Weak Orlicz spaces generated by concave functions, *International Conference on Information Science and Technology* (ICIST), 42–44.

[26]. N. L. Carothers, 2000. *A Short Course on Banach Space Theory*, Department of Mathematics and Statistics, Bowling Green State University

[27]. R. E. Castillo & H. Rafeiro, 2016. *An Introductory Course in Lebesgue Spaces*, CMS books in Mathematics, Springer: Canadian Mathematical Society

[28]. J. B. Conway, 2007. *A Course in Functional Analysis (Second Edition)*, Springer-Verlag, USA

[29]. S.G Kreĭn, Yu.Ī Petunīn, & E.M. Semënov, 1982. *Interpolation of Linear Operators*, Translation of Mathematical Monograph vol. 54, American Mathematical Society, Providence, R.I.

[30]. A. Kufner, O. John, & S. Fučik, 1977. *Function Spaces*, Noordhoff International Publishing, Czechoslovakia.

[31]. Luxemburg W A J 1955 *Banach Function Spaces*, Thesis : Technische Hogeschool te Delft

[32]. L. Maligranda, 1989. *Orlicz Spaces and Interpolation*, Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Campinas.

[33]. A.A. Masta, 2013. *On Uniform Orlicz Spaces*, Thesis, Bandung Institute of Technology.

[34]. W. Orlicz, 1992. *Linear Functional Analysis (Series in Real Analysis Volume 4)*, World Scientific, Singapore.

[35]. M.M. Rao and Z.D. Ren, 1991. *Theory of Orlicz Spaces*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics vol. 146, Marcel Dekker, Inc., New York.

[36]. H. L. Royden & P. M. Fitzpatrick, 2009, *Real Analysis (Fourth Edition)*, China Machine Press, China