TIPE BARU METODE NEWTON UNTUK MENCARI AKAR PERSAMAAN NONLINEAR

Yudhi[a], Woro Budiartini Partiwi, dan Mariatul Kiftiah

Universitas Tanjungpura
Pontianak, Kalimantan Barat, 78124

[a)]*E-mail: dhye_dhoank@yahoo.co.uk*

ABSTRAK

Metode Newton merupakan salah satu metode yang dapat mencari persamaan nonlinear dengan syarat $f'(r) \neq 0$ untuk suatu $r \in \mathbb{R}$. Penelitian ini bertujuan mengkonstruksi metode baru dengan memodifikasi metode Newton dengan persamaan Newton-Cotes Kuadratur menggunakan metode Trapesium orde dua untuk menghampiri integral. Hasil penelitian ini diperoleh tipe baru metode Newton dengan konvergensi kubik untuk mencari akar persamaan nonlinear.

Kata kunci: *Newton-Cotes Kuadratur, Galat, Konvergensi*

PENDAHULUAN

Analisis numerik merupkan salah satu cabang matematika yang banyak diaplikasikan kebidang teknik, fisika dan ilmu sains lainnya. Permasalahan di kehidupanya nyata banyak berhubungan dengan persamaan nonlinear. Penyelesaian persamaan nonlinear adalah salah satu masalah yang penting dalam analisis numerik. Metode penyelesaian dari persamaan nonlinear ada dua metode, yaitu metode tertutup dan terbuka.

Metode terbuka terdiri dari metode bagi dua, metode titik tetap dan metode posisi palsu. Kelebihan metode ini, yaitu nilainya yang selalu konvergen tetapi memerlukan banyak iterasi. Sedangkan metode terbuka terdiri dari metode Newton dan metode Secant, yang memiliki kekonvergenan lebih cepat dibandingkan metode tertutup. Namun, mempunyai kelemahan di kekonvergensiannya.

Metode Newton merupakan salah satu metode terbuka yang mempunyai konvergensi kuadratik dengan syarat $f'(r) \neq 0$ untuk suatu bilangan $r \in \mathbb{R}$. Modifikasi metode Newton dengan menggunakan persamaan Newton-Cotes Kuadratur telah dilakukan beberapa peneliti, yaitu Weerakoon and Fernando (2000) dengan metode Trapesium orde satu untuk menghampiri integral, Frontini and Sormani (2003) dengan metode Midpoint untuk menghampiri integral, dan Homeier (2005) dengan metode Midpoint untuk menghampiri integral dan mencari fungsi invers. Oleh karena itu, penelitian ini memodifikasi metode Newton menggunakan persamaan Newton-Cotes Kuadratur dengan metode Trapesium orde dua untuk menghampiri integral.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Metode Newton merupakan salah satu metode yang dapat mencari akar persamaan nonlinear dengan syarat $f'(r) \neq 0$ untuk suatu $r \in \mathbb{R}$ yang mempunyai konvergensi kuadratik dengan formula sebagai berikut

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \qquad (1)$$

Penelitian ini mengkonstruksi tipe baru dari metode Newton, dengan memodifikasi metode Newton dengan menggunakan persamaan Newton-Cotes Kuadratur, yaitu

$$f(x) = f(x_n) + \int_{x_n}^{x} f'(t)\,dt \qquad (2)$$

dan penelitian sebelumnya memodifikasi metode Newton menggunakan Persamaan (2), yaitu Weerakoon and Fernando (2000), Frontini and Sormani (2003) dan Homeier (2005). Penelitian ini menghampiri integral pada Persamaan (2) dengan metode Trapesium orde dua.

Dengan menggunakan metode Trapesium orde dua untuk menghampiri Persamaan (2) diperoleh

$$f(x) = f(x_n) + \int_{x_n}^{x} f'(t)\,dt$$
$$\approx f(x_n) + \frac{(x-x_n)}{4}\left(f'(x_n) + 2f'\left(\frac{x_n+x}{2}\right) + f'(x)\right).$$

Jika $f(x) = 0$, diperoleh persamaan implisit

$$x_{n+1} = x_n - \frac{4f(x_n)}{f'(x_n) + 2f'\left(\frac{x_n + x_{n+1}}{2}\right) + f'(x_{n+1})} \qquad (3)$$

sehingga untuk mendapatkan betuk eksplisit, ganti $f'(x_{n+1})$ dengan $f'(x^*_{n+1})$ dan $f'\left(\frac{x_n+x_{n+1}}{2}\right)$ dengan $f'\left(\frac{x_n+x^*_{n+1}}{2}\right)$, dimana $x^*_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Dengan demikian Persamaan (3) dapat dituliskan

$$x_{n+1} = x_n - \frac{4f(x_n)}{f'(x_n) + 2f'\left(\frac{x_n + x^*_{n+1}}{2}\right) + f'(x^*_{n+1})}. \qquad (4)$$

Misalkan $y_n = x^*_{n+1}$ dan $z_n = \frac{x_n + x^*_{n+1}}{2}$, maka Persamaan (4) dapat dituliskan

$$\begin{cases} y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ z_n = x_n - \frac{f(x_n)}{2f'(x_n)} \\ x_{n+1} = x_n - \frac{4f(x_n)}{f'(x_n) + 2f'(z_n) + f'(y_n)} \end{cases} \qquad (5)$$

Teorema 1. Misalkan fungsi $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ terdiferensialkan pada D dan $f(x^*) = 0$ untuk suatu $x^* \in D$, maka

$$e_{n+1} = \frac{c_3}{8c_1}e_n^3 + O(e_n^4)$$

dimana $c_k = \frac{f^{(k)}}{k!}$, untuk $k \in \mathbb{N}$.

Bukti

Misalkan $e_n = x_n - x^*$. Deret Taylor $f(x_n)$ dan $f'(x_n)$ disekitar x^* adalah

$$f(x_n) = c_1 e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + c_4 e_n^4 + O(e_n^5) \quad (6)$$

dan

$$f'(x_n) = c_1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + 4c_4 e_n^3 + 5c_5 e_n^4 + O(e_n^5) \ (7)$$

Maka

$$\begin{aligned}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} &= \frac{c_1 e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + c_4 e_n^4 + O(e_n^5)}{c_1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + 4c_4 e_n^3 + 5c_5 e_n^4 + O(e_n^5)} \\ &= e_n - \frac{c_2}{c_1}e_n^2 + 2\left(\frac{c_2^2}{c_1^2} - \frac{c_3}{c_1}\right)e_n^3 \\ &\quad - \left(\frac{4c_2^3}{c_1^3} - \frac{7c_2c_3}{c_1^2} + \frac{3c_4}{c_1}\right)e_n^4 + O(e_n^5).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_n &= x_n - \frac{f(x)}{f'(x)} \\ &= e_n + x^* - \left(e_n - \frac{c_2}{c_1}e_n^2 + 2\left(\frac{c_2^2}{c_1^2} - \frac{c_3}{c_1}\right)e_n^3 - \left(\frac{4c_2^3}{c_1^3} - \frac{7c_2c_3}{c_1^2} + \frac{3c_4}{c_1}\right)e_n^4\right) + O(e_n^5) \\ &= x^* + \frac{c_2}{c_1}e_n^2 - 2\left(\frac{c_2^2}{c_1^2} - \frac{c_3}{c_1}\right)e_n^3 + \left(\frac{4c_2^3}{c_1^3} - \frac{7c_2c_3}{c_1^2} + \frac{3c_4}{c_1}\right)e_n^4 + O(e_n^5)\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}z_n &= x_n - \frac{f(x)}{2f'(x)} \\ &= x^* + \frac{e_n}{2} + \frac{c_2}{2c_1}e_n^2 - \left(\frac{c_2^2}{c_1^2} - \frac{c_3}{c_1}\right)e_n^3 + \left(\frac{2c_2^3}{c_1^3} - \frac{7c_2c_3}{2c_1^2} + \frac{3c_4}{2c_1}\right)e_n^4 + O(e_n^5).\end{aligned}$$

Deret Taylor dari $f(y_n)$, $f'(y_n)$, $f(z_n)$ dan $f'(z_n)$ disekitar x^* adalah

$$f(y_n) = c_2 e_n^2 - 2\left(\frac{c_2^2}{c_1} - c_3\right)e_n^3 + \left(\frac{5c_2^3}{c_1^2} - \frac{7c_2c_3}{c_1} + 3c_4\right)e_n^4 + O(e_n^5)$$

$$f'(y_n) = c_1 + \frac{2c_2^2}{c_1}e_n^2 - 4\left(\frac{c_2^3}{c_1^2} - \frac{c_2c_3}{c_1}\right)e_n^3 + \left(\frac{8c_2^4}{c_1^3} - \frac{11c_2^2c_3}{c_1^2} + \frac{6c_2c_4}{c_1}\right)e_n^4 + O(e_n^5) \quad (8)$$

$$f(z_n) = \frac{c_1}{2}e_n + \frac{3c_2}{4}e_n^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{5c_2^3}{c_1^2} - \frac{4c_2^2}{c_1} + 9c_3\right)e_n^3 - \frac{1}{16}\left(\frac{34c_2c_3}{c_1} - 25c_4\right)e_n^4 + O(e_n^5)$$

$$\begin{aligned}f'(z_n) &= c_1 + c_2 e_n + \left(\frac{c_2^2}{c_1} + \frac{3c_3}{4}\right)e_n^2 - \left(\frac{2c_2^3}{c_1^2} - \frac{7c_2c_3}{2c_1} + \frac{c_4}{2}\right)e_n^3 \\ &\quad + \left(\frac{4c_2^4}{c_1^3} - \frac{37c_2^2c_3}{4c_1^2} + \frac{9c_2c_4}{2c_1} + \frac{3c_2^2}{c_1} + \frac{5c_5}{16}\right)e_n^4 + O(e_n^5) \quad (9)\end{aligned}$$

Substitusikan Persamanan (6), (7), (8) dan (9) dan $e_n = x_n - x^*$ ke Persamaan (5), diperoleh

$$\begin{aligned}e_{n+1} &= e_n - \frac{4f(x_n)}{f'(x_n) + 2f'(z_n) + f'(y_n)} \\ &= e_n - \left(e_n - \frac{c_3}{8c_1}e_n^3 + O(e_n^4)\right) \\ &= \frac{c_3}{8c_1}e_n^3 + O(e_n^4) \blacksquare.\end{aligned}$$

Berikut ini hasil simulasi numerik dari Metode Newton (NM), Metode Homeier (HM), Metode Weerakoon and Fernando (WFM) dan metode yang diperoleh dari penelitian ini, yaitu Tipe Baru Metode Newton(TBMN) dengan toleransi galat 10^{-15} dari berberapa fungsi berikut:

$f_1(x) = \cos(x) - x$ $\quad x^* = 0.739085133215161$
$f_2(x) = (x-1)^3 - 2$ $\quad x^* = 2.25992104989487$
$f_3(x) = (x+2)e^x - 3$ $\quad x^* = 0.276133929771646$
$f_4(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ $\quad x^* = 1.3652300134141$
$f_5(x) = e^{x^2+7x-30} - 1$ $\quad x^* = 3.$

Tabel 1. Perbandingan jumlah iterasi dari beberapa metode

$f(x)$	x_0	Iterasi			
		TBMN	HM	WFM	NM
$f_1(x)$	4,0	5	31	7	29
$f_2(x)$	1,8	4	4	4	6
$f_3(x)$	0,0	3	3	3	5
$f_4(x)$	4,0	4	4	5	7
$f_5(x)$	3,2	5	5	5	8

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan bahwa metode yang dperoleh dari modifikasi metode Newton dapat mencari akar persamaan nonlinear dengan dengan konvergensi kubik.

REFERENSI

Ababneh, O. Y. 2012. New Newton's Method with Third-order Convergence for Solving Nonlinear Equations. *Inter. J. Math. Comput. Phys. Electrical and Computer Engineering*,6 (1), pp. 118-120.

Frontini, M. and Sormani, E. 2003. Some variants of Newton's method with third-order convergence, *J.Comput.Appl. Math.*, 140 (2-3), pp. 419–426.

Frontini, M. and Sormani, E. 2004. Third-order methods from quadrature formulae for solving systems of nonlinear equations. *Appl. Math.Comput*. 149 (3), pp. 771–782.

Ghanbari, B. 2012. Three-Step Iterative Methods with Sixth-Order Convergence for Solving Nonlinear Equations. *Walailak J. Sci. & Tech.*, 9 (3), pp. 249-253.

Hasanov, V.I., Ivanov, I. G. and Nedjibov, G. 2002. A New Modification of Newton's Method. *Applied Mathematics and Engineering*, 27, pp. 278-286.

Homeier, H.H.H. 2003. A Modified Newton Method for Rootfinding With Cubic Convergence. *J. Comput. Appl. Math*., 157 (1), pp. 227–230.

Homeier, H.H.H. 2004. A Modified Newton Method with Cubic Convergence: The Multivariate Case. *J. Comput. Appl. Math*., 169 (1), pp. 161–169.

Homeier, H.H.H. 2005. On Newton-Type Methods with Cubic Convergence. *J.Comput.Appl.Math*., 176 (2), pp. 425–432.

Kou, J., Li, Y. and Wang, X. 2006. A Modification of Newton Method with Third Order Convergence. *Applied Mathematics and Computation*, 181 (2), pp. 1106-1111.

Mirzaee, F. and Hamzeh, A. 2014. A Sixth Order Method for Solving Nonlinear Equations. *Inter. J. Math. Mode. Comput.*, 4 (1), pp. 55-60.

Oghovese, O. and Johnson, A.O. 2014. New Two-Step Method with Fifth-Order Convergence for Solving Nonlinear Equations. *Inter. J. Math. Stat. Invention*, 2 (10), pp. 24-27.

Weerakon, S. and Fernando, T.G.I. 2000. A Variant of Newton's Method with Accelerated Third Order Convergence. *Applied Mathematics Letters*, 13 (8), pp. 87-93.